# Géométrie des surfaces

$E$ désigne l'espace géométrique muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

## I. Nappes paramétrées

$U$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

### 1°) Définition

*Déf :* On appelle nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ de $E$ tout couple $\Sigma=(U,M)$ formé d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et d'une application $M:\begin{cases}U\to E\\(u,v)\mapsto M(u,v)\end{cases}$ telle que $(u,v)\mapsto\overrightarrow{OM}(u,v)$ soit de classe $\mathcal{C}^k$.

$M(u,v)$ : point courant de paramètre $(u,v)$ de $\Sigma$.

$\text{Supp}\,\Sigma=\{M(u,v)/(u,v)\in U\}$ : support de la nappe $\Sigma$.

On dit aussi que $\Sigma$ est un paramétrage de son support.

*Déf :* Soit $(u,v)\subset U\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in\mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. On appelle nappe cartésienne définie par $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ la nappe $\Sigma=(U,M)$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $M(u,v)$ le point de coordonnées cartésiennes $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.

### 2°) Arc tracé sur une nappe

Soit $\Sigma=(U,M)$ une nappe de classe $\mathcal{C}^k$.

*Déf :* On appelle arc paramétré tracé sur la nappe $\Sigma=(U,M)$ tout arc $\Gamma=(I,M)$ pour lequel il existe une application $t\in I\mapsto(u(t),v(t))\in U$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $M(t)=M(u(t),v(t))$.

### 3°) Plan tangent

Soit $\Sigma=(U,M)$ une nappe classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq1$) et $M_0=M(u_0,v_0)$ avec $(u_0,v_0)\in U$.

*Déf :* Le point $M_0$ est dit régulier ssi $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$ ne sont pas colinéaires i.e. $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\neq\vec{o}$.

La nappe $\Sigma$ est dite régulière ssi tous ses points le sont.

*Théorème :*

Si $M_0$ est régulier et si $\Gamma$ est un arc régulier tracé sur $\Sigma$ passant par $M_0$ alors la tangente à $\Gamma$ en $M_0$ est incluse dans le plan passant par $M_0$ et dirigé par $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

*Déf :* Si $M_0$ est régulier alors le plan passant par $M_0$ et de vecteur normal $\vec{n}=\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$ est appelé plan tangent à $\Sigma$ en $M_0$.

La droite passant par $M_0$ et dirigée par $\vec{n}$ est appelée droite normale à $\Sigma$ en $M_0$.

## II. Surfaces définies par une équation cartésienne

$U$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

### 1°) Définition

*Déf :* Soit $f:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. On appelle surface $\Sigma$ définie (implicitement) par l'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ l'ensemble formé des points $M$ de l'espace dont les coordonnées $(x,y,z)\in U$ vérifient : $f(x,y,z)=0$. On note alors $\Sigma:f(x,y,z)=0$.

Pour étudier $\Sigma$, on peut :

- résoudre l'équation $f(x,y,z)=0$ de sorte, à permutation des variables près, d'exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$.
- former un paramétrage de $\Sigma$.

### 2°) Théorème des fonctions implicites

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k\geq 1$) et $(x_0,y_0,z_0)\in U$ tel que $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

*Théorème :*(admis)

Si $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ alors il existe une boule ouverte $B$ centrée en $(x_0,y_0)$ et un intervalle ouvert $J$ centré en $z_0$ tels que $B\times J\subset U$ et tels qu'il existe une fonction $\varphi:B\to J$ de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant : $\forall(x,y,z)\in B\times J\ :\ f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=\varphi(x,y)$.

*Déf :* On dit que la relation $f(x,y,z)=0$ définit implicitement $\varphi:(x,y)\mapsto z$ au voisinage de $(x_0,y_0,z_0)$.

Que sait-on sur $\varphi$ ?

$\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $z_0=\varphi(x_0,y_0)$, $\forall(x,y)\in B$, $f(x,y,\varphi(x,y))=0$.

En dérivant par rapport à $x$ et $y$ : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=-\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0,y_0,z_0)$.

### 3°) Plan tangent

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Sigma:f(x,y,z)=0$.

*Déf :* Un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de la surface $\Sigma$ est dit régulier ssi $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)\neq\vec{o}$.

*Théorème :*

Si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point régulier de $\Sigma$ alors $\Sigma$ admet un plan tangent en $M_0$ dont $\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{o}$ est vecteur normal.

### 4°) Courbe intersection de deux surfaces

*Théorème :*

Soit $\Sigma_1:f_1(x,y,z)=0$ et $\Sigma_2:f_2(x,y,z)=0$ avec $f_1,f_2:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Si $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point régulier commun à $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ tel que les plans tangentes $P_1$ et $P_2$ en ce point soient distincts alors au voisinage de $M_0$, $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ est le support d'un arc de classe $\mathcal{C}^k$ dont la tangente en $M_0$ est $P_1\cap P_2$.

## III. Surfaces usuelles

### 1°) Cylindres

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\Gamma$ une courbe de l'espace.

*Déf :* On appelle cylindre $\mathcal{C}$ de direction $\vec{u}$ engendré par $\Gamma$ la réunion des droites $(M;\vec{u})$ avec $M\in\Gamma$. Ces droites sont appelées génératrices du cylindre.
L'intersection du cylindre avec un plan de vecteur normal $\vec{u}$ est appelée section droite du cylindre. Selon la nature de cette section, on qualifie le cylindre.

*Prop :* $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},M+t\vec{u}\in\Gamma$.
On peut former une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ par élimination de $t$.

### 2°) Cônes

Soit $\Omega$ un point et $\Gamma$ une courbe de l'espace ne contenant pas $\Omega$.

*Déf :* On appelle cône $\mathcal{C}$ de sommet $\Omega$ engendré par $\Gamma$ la réunion des droites $(\Omega M)$ avec $M\in\Gamma$. Ces droites sont appelées génératrices du cône.

*Prop :* $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow M=\Omega$ ou $\exists t\in\mathbb{R},\Omega+t\overrightarrow{\Omega M}\in\Gamma$.
On peut former une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ par élimination de $t$.

### 3°) Surface de révolution

Soit $\Delta = (A;\vec{u})$ une droite et $\Gamma$ une courbe.

*Déf :* On appelle surface de révolution $\Sigma$ d'axe $\Delta$ engendré par $\Gamma$ la réunion des cercles centrés sur $\Delta$ passant par les points de $\Gamma$. Ces cercles sont appelés parallèle de $\Sigma$ tandis que les intersections de $\Gamma$ avec les plans contenant $\Delta$ sont appelées méridienne de $\Sigma$.

*Prop :* $M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists P \in \Gamma, AM = AP$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$.
On peut former une équation cartésienne de $\Sigma$ par élimination de $P$.

## IV. Quadriques

### 1°) Paraboloïdes

*Déf :* Un paraboloïde elliptique $\mathcal{PE}$ est une surface possédant une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

*Déf :* Un paraboloïde hyperbolique $\mathcal{PH}$ est une surface possédant une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

### 2°) Quadrique à centre

*Déf :* Un ellipsoïde $\mathcal{E}$ est une surface possédant une équation cartésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

*Déf :* Un hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}_1$ est une surface possédant une équation cartésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

*Déf :* Un hyperboloïde à deux nappes $\mathcal{H}_2$ est une surface possédant une équation cartésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

### 3°) Quadriques

*Déf :* On appelle quadrique toute surface pouvant être définie par une équation de la forme $ax^2+by^2+cz^2+2(dxy+eyz+fzx)+2(gx+hy+iz)+k=0$ avec $(a,b,c,d,e,f) \neq 0$.

*Théorème :*
Une équation du plan tangent au point régulier d'une quadrique s'obtient par dédoublement.

### 4°) Obtention de l'équation réduite d'une quadrique

Etudions la quadrique $\Sigma : ax^2+by^2+cz^2+2(dxy+eyz+fzx)+2(gx+hy+iz)+k=0$.

Pour $M(x,y,z)$, on pose $f(M)=ax^2+by^2+cz^2+2(dxy+eyz+fzx)+2(gx+hy+iz)+k=0$

$\text{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(q)=\begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$. Il existe une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ telle que $\text{Mat}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}(q)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{R}=(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, $\Sigma : \lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2(px+qy+rz)+k=0$.

Si $\lambda,\mu,\nu \neq 0$ : $\Sigma$ est une quadrique de centre $\Omega$ déterminé par $\overrightarrow{\text{grad}f}(\Omega)=\vec{o}$.
Sinon : $\Sigma$ est paraboloïde ou un cylindre à section conique.